模块五 零点与不等式

第 1 节 函数零点小题策略：不含参（★★☆）

内容提要

不含参的函数零点小题一般有两种处理方法：

1．令 $f(x)=0$，解方程，得出零点个数.

2．若方程 $f(x)=0$ 不好解，可将其等价变形成 $g(x)=h(x)$，则 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 图象的交点个数，即为 $f(x)$ 的零点个数. 等价变形成什么样子，应该以便于作图分析为考虑方向.

典型例题

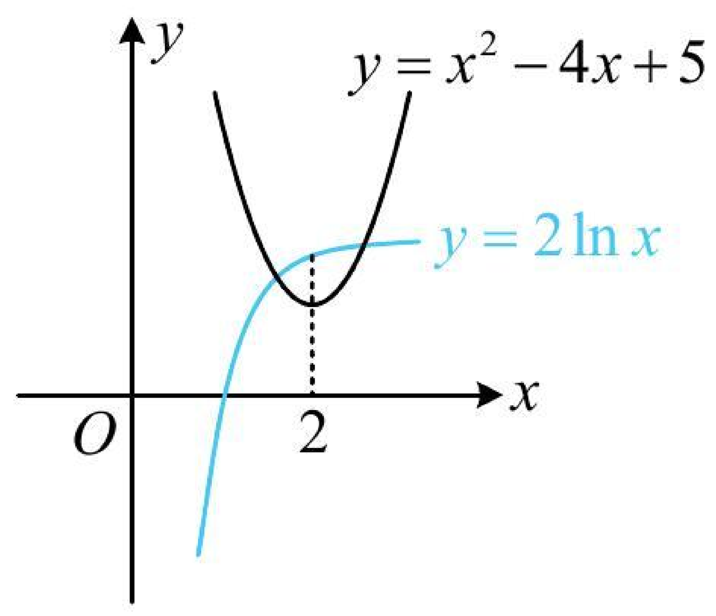
【例 1】函数 $f(x)=2\ln x$ 的图象与 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象的交点个数为（　　）

（A）3　　（B）2　　（C）1　　（D）0

解析：直接画图看交点，因为 $g(x)$ 的对称轴是 $x=2$，所以画图时注意这个关键位置，

如图，因为 $f(2)=2\ln 2>g(2)=1$，所以两图象有 2 个交点.

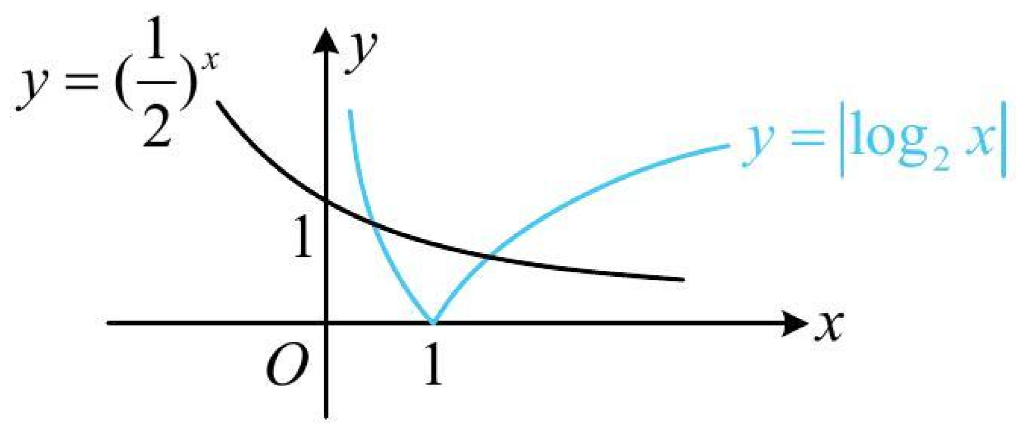
答案：B



【例 2】函数 $f(x)=2^x\cdot|\log_2 x|-1$ 的零点个数为_____.

解析：直接画 $f(x)$ 的图象不方便，所以先将 $f(x)=0$ 等价变形，再作图看交点，

$f(x)=0\Leftrightarrow 2^x\cdot|\log_2 x|-1=0\Leftrightarrow|\log_2 x|=(\frac{1}{2})^x$，如图，两图象有 2 个交点 $\Rightarrow f(x)$ 有 2 个零点.



答案：2

【反思】当直接求解 $f(x)$ 的零点不方便时，可考虑将方程 $f(x)=0$ 等价变形成 $g(x)=h(x)$ 的形式，画 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的图象看交点个数，变形应注意“等价”和“作图方便”两点.

【变式】函数 $f(x)=\begin{cases}4x+1,x\le 0\\ \ln x-x^2+2x,x>0\end{cases}$ 的零点个数为_____.

解析：分段函数研究零点个数，可分段来看，第一段比较简单，直接解方程 $f(x)=0$，

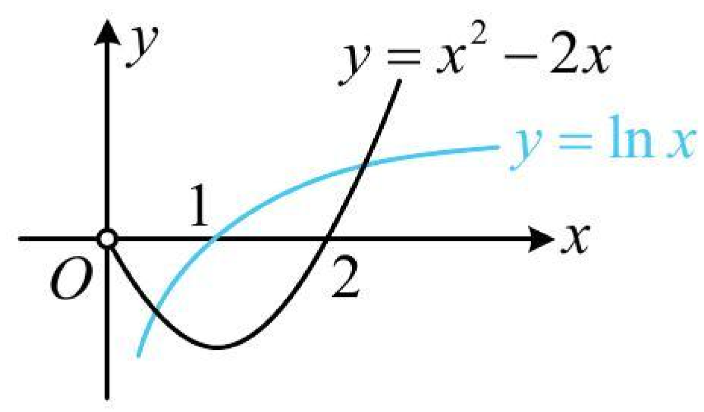
当 $x\le 0$ 时，$f(x)=4x+1=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 有 1 个零点；

第二段的零点解不出来，所以等价变形，再画图看交点，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x-x^2+2x=0\Leftrightarrow \ln x=x^2-2x$，作出 $y=\ln x$ 和 $y=x^2-2x(x>0)$ 的图象如图，

由图可知两图象有 2 个交点，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点；故 $f(x)$ 共有 3 个零点.

答案：3



【反思】分段函数的零点可分段研究，在每一段上，若零点能求出，则直接求，否则等价变形看交点.

【例 3】定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 周期为 2，当 $-1\le x<1$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2+2,0\le x<1\\2-x^2,-1\le x<0\end{cases}$，设 $g(x)=3-\log_2 x$，则函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数为（　　）

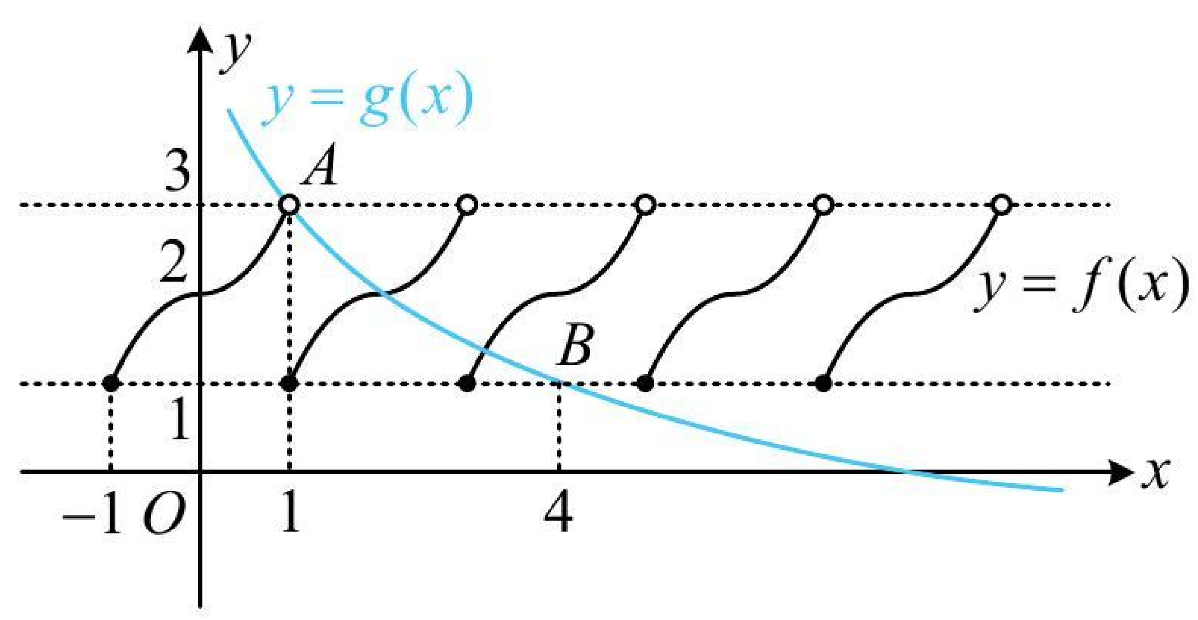
（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

解析：$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$，下面作图看交点，由于 $f(x)$ 只在直线 $y=1$ 和 $y=3$ 之间部分有图象，所以作图时需注意 $g(x)$ 的图象与该两直线的交点 A，B 的位置，

令 $g(x)=3$ 可得 $3-\log_2 x=3$，即 $x=1$，故 $A(1,3)$；同理可得，$B(4,1)$，

如图，由图可知两图象有 2 个交点，故选 B.

答案：B



【反思】务必注意空心点和实心点，空心点处必定不是交点.

【变式】函数 $f(x)=1-(x-\pi)\sin x$ 在区间 $[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2}]$ 上的所有零点之和为（　　）

（A）0　（B）2π　（C）4π　（D）6π

解析：零点无法求出，故等价变形看交点，$f(x)=0\Leftrightarrow(x-\pi)\sin x=1$ ①，

为了便于作图，把 $x-\pi$ 除过去，先考虑其能否为 0，当 $x=\pi$ 时，方程①不成立；

当 $x\ne\pi$ 时，方程①等价于 $\sin x=\dfrac{1}{x-\pi}$，接下来作图看交点，

不难发现 $y=\sin x$ 和 $y=\dfrac{1}{x-\pi}$ 的图象都关于点 $(\pi,0)$ 对称，所以它们的交点也关于点 $(\pi,0)$ 对称，

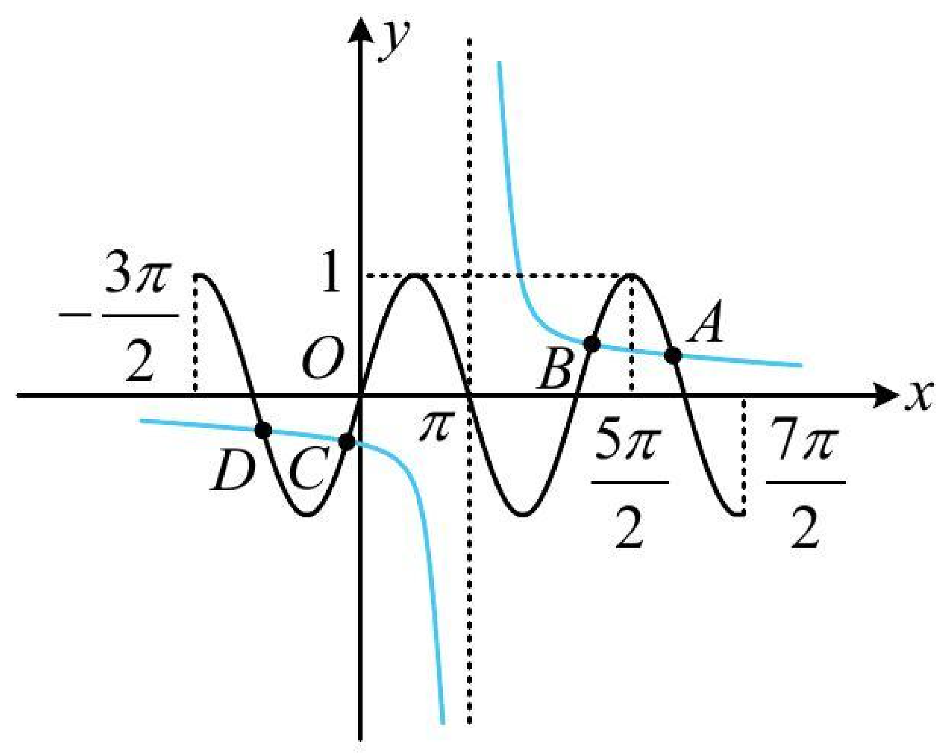
要分析两图象的交点个数，应抓住 $x=\dfrac{5\pi}{2}$ 这个关键位置，

当 $x=\dfrac{5\pi}{2}$ 时，$\dfrac{1}{x-\pi}=\dfrac{2}{3\pi}<\sin x=1$，所以两图象如图，由图可知它们共有 A，B，C，D 这 4 个交点，

其中 A 与 D，B 与 C 关于 $(\pi,0)$ 对称，所以 $\dfrac{x_A+x_D}{2}=\pi$，$\dfrac{x_B+x_C}{2}=\pi$，

故 $x_A+x_B+x_C+x_D=4\pi$，即 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2}]$ 上所有零点之和为 4π .

答案：C



【反思】当题干让求零点之和时，可以考虑利用图象的对称性求解.

强化训练

1.（2022•四川模拟•★★）已知函数 $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x-\cos x$，则 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的零点个数为（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

2.（2023•全国甲卷•★★★）已知 $f(x)$ 为函数 $y=\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后所得图象的函数，则 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 的交点个数为（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

3.（★★★）设 $f(x)=\begin{cases}e^x+1,x\ge 0\\ |x^2+2x|,x<0\end{cases}$，则 $g(x)=f(x)-ex-1$ 的零点个数为（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

4．（2023 • 绵阳二诊 • ★★★）若函数 $f(x)=\begin{cases}2+\ln x, x>0\\x, x\le 0\end{cases}$， $g(x)=f(x)+f(-x)$，则函数 $g(x)$ 的零点个数为_____.

5.（2022 •南昌模拟 •★★★★）定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$，$f(x)=f(2-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时， $f(x)=x^2$，则函数 $y=7f(x)-x+2$ 的所有零点之和为（　　）

（A）7　（B）14　（C）21　（D）28